多目的順序メディアン立地問題 (21世紀の数理計画 : 最適化モデルとアルゴリズム)

大澤, 義明; 尾崎, 尚也; プラストリア, フランク; 田村, 一軌

数理解析研究所講究録
第1629巻 2009年 27-36

多目的順序メディアン立地問題
Multi-objective Ordered Median Location Problems

筑波大学　大澤 義明 (Yoshiaki Ohsawa)
University of Tsukuba
鉄道総合技術研究所　尾崎 尚也 (Naoya Ozaki)
Railway Technical Research Institute
ブリュッセル自由大学　フランク プラストリア (Frank Plastria)
Vrije Universiteit Brussel
鉄道総合技術研究所　田村 一軌 (Kazuki Tamura)
Railway Technical Research Institute

1　はじめに

近年，立地理論において順序メディアン問題が熱心に研究されている．この新しい立地モデルはごく一般的な形で定式化されており，実問題への応用性も高い．実際，ウェーバー問題やセンター問題といった多くの有名な立地モデルもこのモデルの特別な場合と見なすことができるのである．順序メディアン問題については，最近の本では Nickel and Puerto[5] に詳しい．このフレームにおいては連続空間におけるさまざまな距離が用いられてきた．一方で Nickel et al.[6] の調査にあるように，立地解析においても急速な数理計画の進歩とともに，2つ以上の目的関数を最適化する多目的アプローチが用いられるようになった．

本稿では，二乗距離を用いた順序メディアン問題を複数組合せた多目的問題の，統一的記述とその解法を示す．

本研究では，距離尺度として二乗距離（直線距離の二乗）を用いる．第一の理由は，解析的な解を得るためである．ユークリッド距離を用いたほうがより現実的ではあるが，ほとんど解析的結果を得ることができない．また例外的ではあるが，いくつかの問題においては二乗距離とユークリッド距離を用いた目的関数が等価となる．二つ目の理由は，二次式による定式化により目的関数の等高線が円弧から構成されることである．これにより地理的に有用な情報を提供することが可能となる．すなわちこの定式化は，順序メディアン問題の本質を理解する上で極めて有用なものとなる．

最初に，ボロノイ図に基づく**一目的**二乗距離順序メディアン問題の解を特徴付ける．次に，2つの順序メディアン問題を組み合わせた**二目的**問題のパレート最適集合とそれに対応するトレードオフ曲線を検出する方法を示す．Nickel and Puerto[5] などの既存研究においては，目的関数が凸であるような問題の組合せしか議論されていなかった．我々はこの困難を，ボロノイ図や包絡線といった計算幾何学の手法を用いて克服し，領域や目的関数が非凸なものも含め，**すべての**二乗距離二目的順序メディアン問題の解法を示す．最後に，2次元平面における**すべての**多目的二乗距離凸順序メディアン問題について，パレート最適集合とその計算量を示す．

2 一目的モデル

2.1 定式化

ユークリッド空間の閉じた領域 Ω に施設を建設することを考える．ただしその境界 $\partial\Omega$ は折れ線によって構成されているものとする．住民の位置を $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_{|I|}\}$，その添字集合を I としよう．正または負の値をとる，i 番目の住民に対応する重みを α_i とする

対象領域 Ω 内に施設を立地する次の**二乗距離順序メディアン問題**を考える:

$$\min_{\mathbf{x}\in\Omega}\left(F(\mathbf{x}) \equiv \sum_{i\in I} \alpha_i \|\mathbf{x}-\mathbf{p}_{(i)}\|^2\right), \tag{1}$$

ここで (i) は地点 $\mathbf{x}$ から i 番目に近い住民を表す添字であり，すなわち (i) は $\mathbf{x}$ に依存する．問題 (1) は，$\mathbf{x}$ からの距離の順序に依存する，施設と住民との間の重み付き二乗距離の和を最小にする地点を求める問題である．表 1 は，Nickel and Puerto[4] の表にもとづき，や Muñoz-Pérez and Saameño-Rodríguez[3] で示された例やいくつかの新規提案を加えたものである．ここに示されたように，順序メディアン立地問題は多くの標準的な問題を一般化している．一般にこれらの問題は，すべての $i \in I$ に対して $\alpha_i > 0$ であるときプル型の目的関数であり便益施設の適用され，すべての $i \in I$ に対して $\alpha_i < 0$ であるときはプッシュ型の目的関数であり，迷惑施設に適用される．また，$\alpha_1 = -\alpha_{|I|} > 0$ and $\alpha_2 = \cdots = \alpha_{|I|-1} = 0$ のとき問題は平等性最大化に対応する．

表 1 二乗距離一目的順序メディアン問題

種類	問題	重み $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{\|I\|})$	A の符号	凸性
pull	Weber	$(1, 1, \cdots, 1, 1)$	$+$	convex
	center	$(0, 0, \cdots, 0, 1)$	$+$	convex
	k-centrum	$(0, \cdots, 0, \overbrace{1, \cdots, 1}^{k})$	$+$	convex
	cent-dian	$(\omega, \omega, \cdots, \omega, 1), \quad (0 \le \omega \le 1)$	$+$	convex
	partial center	$(0, \cdots, 0, 1, \overbrace{0, \cdots, 0}^{n^+})$	$+$	—
	trimmed mean	$(\overbrace{0, \cdots, 0}^{m}, 1, \cdots, 1, \overbrace{0, \cdots, 0}^{m})$	$+$	—
push	anti-Weber	$(-1, -1, \cdots, -1, -1)$	$-$	concave
	anticenter	$(-1, 0, \cdots, 0, 0)$	$-$	—
	anti-k-centrum	$(\overbrace{-1, \cdots, -1}^{k}, 0, \cdots, 0)$	$-$	—
	anticenter-maxian	$(-1, -\omega, \cdots, -\omega, -\omega), \quad (0 \le \omega \le 1)$	$-$	—
	partial anticenter	$(\overbrace{0, \cdots, 0}^{n^-}, -1, 0, \cdots, 0)$	$-$	—
	anti-trimmed mean	$(\overbrace{0, \cdots, 0}^{m}, -1, \cdots, -1, \overbrace{0, \cdots, 0}^{m})$	$-$	—
equity	mean difference	$(1-\|I\|, 3-\|I\|, \cdots, \|I\|-3, \|I\|-1)$	0	convex
	range	$(-1, 0, \cdots, 0, 1)$	0	convex
	trimmed range	$(\overbrace{0, \cdots, 0}^{m}, -1, 0, \cdots, 0, 1, \overbrace{0, \cdots, 0}^{m})$	0	—

2.2 特性

ボロノイ図は計算幾何学分野で多く研究されている概念である: Okabe et al.[11] 等を参照. $V_{i_1,i_2,\cdots,i_{|I|}}$ を順序ボロノイ領域としよう. 数学的には次のように記述できる

$$V_{i_1,i_2,\cdots,i_{|I|}} \equiv \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\mathbf{x}-\mathbf{p}_{i_1}\| \le \|\mathbf{x}-\mathbf{p}_{i_2}\| \le \cdots \le \|\mathbf{x}-\mathbf{p}_{i_{|I|}}\|\}. \tag{2}$$

完全順序ボロノイ図は空でない $V_{i_1,i_2,\cdots,i_{|I|}}$ の集積として定義される. ボロノイ領域の境界は $\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j$ のあらゆる組合せに対する垂直二等分線からなる. Ω の中にある $V_{i_1,i_2,\cdots,i_{|I|}}$ の境界を ∂V と表す.

ボロノイ領域 (2) を用いて, 式 (1) の $F(\mathbf{x})$ は次のように書き直すことができる

$$F(\mathbf{x}) \equiv \sum_{k\in I} \alpha_k \|\mathbf{x}-\mathbf{p}_{i_k}\|^2, \qquad \mathbf{x} \in V_{i_1,i_2,\cdots,i_{|I|}}. \tag{3}$$

ボロノイ領域内部においては, 添字 i_k は $\mathbf{x}$ によって変化しない. すなわち $V_{i_1,i_2,\cdots,i_{|I|}}$ に限れば, 順序二乗距離問題はただの二乗距離問題となる.

A を $A \equiv \sum_{k\in I} \alpha_k$ と定義する. $A=0$ のとき, 式 (3) は次のように書き直すことができる.

$$F(\mathbf{x}) = \langle\, \mathbf{x}\ ;\ \hat{\mathbf{p}}_{i_1,i_2,\cdots,i_{|I|}}\ \rangle + \sum_{k\in I} \alpha_k \|\mathbf{p}_{i_k}\|^2, \qquad \mathbf{x} \in V_{i_1,i_2,\cdots,i_{|I|}}, \tag{4}$$

ここで

$$\hat{\mathbf{p}}_{i_1,i_2,\cdots,i_{|I|}} \equiv -2\sum_{k\in I} \alpha_k \mathbf{p}_{i_k}. \tag{5}$$

である. すなわち, $F(\mathbf{x})$ は区分線形であり, ボロノイ領域 $V_{i_1,i_2,\cdots,i_{|I|}}$ 内部での等高線は $\hat{\mathbf{p}}_{i_1,i_2,\cdots,i_{|I|}}$ と直行する平行線になる. $A \neq 0$ のときには, 式 (3) は以下の式と等価である (Francis and White[1]).

$$F(\mathbf{x}) = A\|\mathbf{x}-\overline{\mathbf{p}}_{i_1,i_2,\cdots,i_{|I|}}\|^2 + \sum_{k\in I} \alpha_k \|\mathbf{p}_{i_k} - \overline{\mathbf{p}}_{i_1,i_2,\cdots,i_{|I|}}\|^2, \qquad \mathbf{x} \in V_{i_1,i_2,\cdots,i_{|I|}}, \tag{6}$$

ここで,

$$\overline{\mathbf{p}}_{i_1,i_2,\cdots,i_{|I|}} \equiv \frac{1}{A}\sum_{k\in I} \alpha_k \mathbf{p}_{i_k} = -\frac{1}{2A}\hat{\mathbf{p}}_{i_1,i_2,\cdots,i_{|I|}}. \tag{7}$$

である. すなわち $F(\mathbf{x})$ を最小化することは, $A>0$ のとき $\|\mathbf{x}-\overline{\mathbf{p}}_{i_1,i_2,\cdots,i_{|I|}}\|^2$ を最小化することと, $A<0$ のときには最大化することと等価である. ここから以下のことが分かる. 第一に, $A\neq 0$ のときには $V_{i_1,i_2,\cdots,i_{|I|}}$ 内部での $F(\mathbf{x})$ の等高線は, 重心 $\overline{\mathbf{p}}_{i_1,i_2,\cdots,i_{|I|}}$ を中心とする半径

$$\sqrt{\frac{F(\mathbf{x}) - \sum_{k\in I} \alpha_k \left(\|\mathbf{p}_{i_k} - \overline{\mathbf{p}}_{i_1,i_2,\cdots,i_{|I|}}\|\right)^2}{|A|}}$$

の円弧となる. 第二に, $A>0$ のとき $F(\mathbf{x})$ はボロノイ領域内部において狭義に凸であり, $A<0$ のとき $F(\mathbf{x})$ は狭義に凹である. つまり A の符号が重要な意味を持つことが分かる. $A>0$ のときには $F(\mathbf{x})$ は距離 $\|\mathbf{x}-\overline{\mathbf{p}}_{i_1,i_2,\cdots,i_{|I|}}\|$ によって増加するが, $A<0$ のときには減少する. よって, 施設

計画の観点から見ると，$A>0$ のときは便益施設に，$A>0$ のときには迷惑施設にそれぞれ対応している．第三に，目的関数 $F(\mathbf{x})$ は一般に非凸であり複数の最適解が存在しうる．

添字集合のすべての順列に対し，$\bar{\mathbf{p}}_{i_1,i_2,\cdots,i_{|I|}}$ もしくは $\bar{\mathbf{p}}_{i_1,i_2,\cdots,i_{|I|}}$ から最も近い $V_{i_1,i_2,\cdots,i_{|I|}}\cap\Omega$ 上の点からなる集合を $\bar{P}$ と定義する．

命題 1　$A>0$ のとき，$F(\mathbf{x})$ を最小にする点 $\mathbf{f}^*$ は $\bar{P}$ 上に存在する．$A\leq 0$ のとき，$\mathbf{f}^*$ は $\partial V\cup\partial\Omega$ 上のいずれかの頂点に存在する．

証明 $A>0$ のとき，目的関数 $F(\mathbf{x})$ は $V_{i_1,i_2,\cdots,i_{|I|}}$ 上では狭義に凸であるので，その領域内で $F(\mathbf{x})$ を最小にする地点 $\mathbf{f}^*$ は一意に定まり，かつ $\bar{P}$ に存在する．したがって大域的最適解 $\mathbf{f}^*$ は集合 $\bar{P}$ の要素である．$A\leq 0$ のとき $F(\mathbf{x})$ は凹である．すなわち $V_{i_1,i_2,\cdots,i_{|I|}}$ 上では，$F(\mathbf{x})$ は端点で最適値をとる．そのような端点は必ず $\partial V\cup\partial\Omega$ の頂点である．■

最適解は常に $\bar{\mathbf{p}}_{i_1,i_2,\cdots,i_{|I|}}$ もしくは $\partial V\cup\partial\Omega$ に存在することになる．

2.3 解法

命題 1 から有限集合である候補地点を調べればよいので，最適立地点を求める以下の手法を導くことができる．

■アルゴリズム 1

ステップ 1. 平面グラフ $\partial V\cup\partial\Omega$ を構築する．
ステップ 2. $A>0$ のときには $\bar{P}$ の中から，$A\leq 0$ の場合には $\partial V\cup\partial\Omega$ の頂点の中から，それぞれ $F(\mathbf{x})$ を最小にする地点を見つける．

命題 2　最適解 $\mathbf{f}^*$ は $O(|I|^5+|I|^3|\partial\Omega|)$ の計算時間で見つけることができる．

ただし対象領域 Ω が凸ならば，計算量は $O(|I|^5+|I||\partial\Omega|)$ に減る：Ohsawa et al.[9] 参照．

3 二目的モデル

3.1 定式化

式 (1) の順序メディアン問題に加えて，以下の 2 つめの順序メディアン問題を考える

$$\min_{\mathbf{x}\in\Omega}\left(G(\mathbf{x})\equiv\sum_{i\in I}\beta_i\|\mathbf{x}-\mathbf{p}_{(i)}\|^2\right). \tag{8}$$

$\mathbf{f}^*$, A, $\hat{\mathbf{p}}_{i_1,i_2,\cdots,i_{|I|}}$, $\bar{\mathbf{p}}_{i_1,i_2,\cdots,i_{|I|}}$ と同様に，$G(\mathbf{x})$ に対して $\mathbf{g}^*$, B, $\hat{\mathbf{q}}_{i_1,i_2,\cdots,i_{|I|}}$, $\bar{\mathbf{q}}_{i_1,i_2,\cdots,i_{|I|}}$ をそれぞれ定義する．

ここで，式 (1) と式 (8) の 2 問題を組み合わせることで得られる以下の**二乗距離二目的順序メディアン問題**を考える:

$$\min_{\mathbf{x}\in\Omega}\{F(\mathbf{x}),G(\mathbf{x})\}. \tag{9}$$

パレート最適立地点とは，その地点よりも二つの目的関数がともに優れているような地点がない，という地点である．以降これを**パレート集合**と呼び E^* で表す．$S \subseteq \Omega$ に対する $(F,G)(S) \equiv \{(F(\mathbf{x}),G(\mathbf{x}))|\mathbf{x} \in S\}$ という表記を用いると，目的空間 $(F,G)(\Omega)$ において左下側包絡線をとったものが**トレードオフ曲線** $(F,G)(E^*)$ である．一般に E^* は両端点に $\mathbf{f}^*$ と $\mathbf{g}^*$ をもつ軌跡となる．

表 2　二乗二目的順序メディアン問題

criteria	single-objective problems	convexity	reference
pull vs. pull	Weber vs. center	convex	[7]
pull vs. push	center vs. anti-center		[8]
	partial anti-center vs. partial center		[10]
pull vs. equity	Weber vs. mean difference	convex	[9]
push vs. equity	anti-Weber vs. mean difference	concave	[9]

表 2 に，定式化 (9) の特別な場合と見なすことができる既存研究をまとめる．

特殊なケースを除くことで考慮する場合の数を減らすために，$\mathbf{p}_{i_1,i_2,\cdots,i_{|I|}}$ 地点は次の意味において一般の位置にあることを仮定する：

(a-1) $F(\mathbf{x})$ の等高線は $G(\mathbf{x})$ の等高線と点で交わる；
(a-2) $F(\mathbf{x})$ と $G(\mathbf{x})$ はともに一意な最小解を持つ．

事実我々が用いる実世界の例では，この仮定はほとんどの場合成り立つ．

3.2　特性

$V_{i_1,i_2,\cdots,i_{|I|}}$ ごとに，直線 $L_{i_1,i_2,\cdots,i_{|I|}}$ を次のように定義する:

$$L_{i_1,i_2,\cdots,i_{|I|}} = \begin{cases} \bar{\mathbf{p}}_{i_1,i_2,\cdots,i_{|I|}} \text{ と } \bar{\mathbf{q}}_{i_1,i_2,\cdots,i_{|I|}} \text{ とを通る直線}, & AB \neq 0 \text{ のとき}, \\ \bar{\mathbf{q}}_{i_1,i_2,\cdots,i_{|I|}} \text{ を通り } \hat{\mathbf{p}}_{i_1,i_2,\cdots,i_{|I|}} \text{ と平行な直線}, & A = 0 \text{ かつ } B \neq 0 \text{ のとき}, \\ \bar{\mathbf{p}}_{i_1,i_2,\cdots,i_{|I|}} \text{ を通り } \hat{\mathbf{q}}_{i_1,i_2,\cdots,i_{|I|}}, \text{ と平行な直線} & A \neq 0 \text{ かつ } B = 0 \text{ のとき}. \end{cases}$$

集合 L を，$V_{i_1,i_2,\cdots,i_{|I|}} \neq \emptyset$ である添字集合の順列に対するすべての集合 $L_{i_1,i_2,\cdots,i_{|I|}} \cap V_{i_1,i_2,\cdots,i_{|I|}} \cap \Omega$ の和集合として定義する．

命題 3　パレート集合 E^* は $\partial V \cup L \cup \partial\Omega$ の部分集合である．

証明　パレート最適立地は，ボロノイ領域の境界 $\partial V \cup \partial\Omega$ でない限り $F(\mathbf{x})$ の等高線と $G(\mathbf{x})$ の等高線が接する地点である．$F(\mathbf{x})$ の等高線は，$A \neq 0$ の場合 $\bar{\mathbf{p}}_{i_1,i_2,\cdots,i_{|I|}}$ を中心とする円の一部であり，そうでない場合は $\hat{\mathbf{p}}_{i_1,i_2,\cdots,i_{|I|}}$ に直交する線分である．同様に $G(\mathbf{x})$ の等高線は，$B \neq 0$ のとき $\bar{\mathbf{q}}_{i_1,i_2,\cdots,i_{|I|}}$ を中心とする円弧であり，それ以外のときには $\hat{\mathbf{q}}_{i_1,i_2,\cdots,i_{|I|}}$ に直交する線分となる．仮定 (a-1) より，そのような 2 つの等高線が接する場所は $L_{i_1,i_2,\cdots,i_{|I|}}$ である．■

$AB > 0$ のときには，より正確には候補点は $\bar{\mathbf{p}}_{i_1,i_2,\cdots,i_{|I|}}$ と $\bar{\mathbf{q}}_{i_1,i_2,\cdots,i_{|I|}}$ を結ぶ線分に絞られる．$AB < 0$ のときには，2 点を通る直線のうち 2 点を結ぶ線分の以外の外側部分に限定できる．しか

し，このような詳細な分類は計算量にほとんど影響しない．命題 3 により，探索領域を平面グラフ $\partial V \cup L \cup \partial\Omega$ の辺に絞ることができる．すなわち，パレート集合 E^* は折れ線のパスになる．

3.3 解法

明らかに $\partial V \cup \partial\Omega \cup L$ はパレート最適でない地点を含んでいる．したがって $\partial V \cup \partial\Omega \cup L$ からパレート集合を構築しなければならない．トレードオフ曲線は $(F,G)(\partial V \cup \partial\Omega \cup L)$ の左下包絡線として与えられる．よって，パレート集合 E^* と対応するトレードオフ曲線はは以下のアルゴリズムにより得られる．

■アルゴリズム 2

ステップ 1. 平面グラフ $\partial V \cup L \cup \partial\Omega$ を構成する．
ステップ 2. 目的空間に $(F,G)(\partial V \cup L \cup \partial\Omega)$ の軌跡を描く．
ステップ 3. 軌跡の左下包絡線を検出する．
ステップ 4. 包絡線に対応する地理空間の地点を特定する．

命題 4　パレート集合とトレードオフ曲線 $(F,G)(E^*)$ は $O((|I|^4 + |I|^2|\partial\Omega|)(|I| + \log|\partial\Omega|))$ の計算時間で見つけることができる．

さらに以下の知見を得ることができる．第一に，Ω が凸領域ならば計算時間は $O((|I|^4+|\partial\Omega|)(|I|+\log|\partial\Omega|))$ に短縮できる．第二に，$F(\mathbf{x})$ と $G(\mathbf{x})$ がともに凸ならば，アルゴリズム 2 よりも計算量の少ないアルゴリズムを設計できる（この点については，4 章で簡単に触れる）．最後に，アルゴリズム 2 は 2 つの目的関数の凸性に依存しない．したがって，このアルゴリズムはこれまで研究されてきたさまざまな準迷惑施設立地問題に適用できる．

4 凸多目的モデル

4.1 定式化

この節では，凸である対象領域内に施設立地場所を決める際に，評価に用いる凸二乗順序メディアン指標を 3 つ以上用いることを考える．Q を二乗順序メディアン指標の添字集合としよう．すなわち $|Q|$ は目的関数の数である．添字 q は Q の中の q 番目の指標を表すものとする．ここで次の $|Q|$ 個の異なった二乗凸順序メディアン問題が与えられたとする．

$$\min_{\mathbf{x}\in\Omega} F^q(\mathbf{x}) \equiv \sum_{i\in I} \alpha_i^q \|\mathbf{x} - \mathbf{p}_{(i)}\|^2, \qquad q \in Q, \tag{10}$$

ここで $\alpha_1^q, \alpha_2^q, \cdots, \alpha_{|I|}^q$ は q 番目の指標に対する重みである．$A^q \equiv \sum_{i\in I} \alpha_i^q$ を定義する．$F^q(\mathbf{x})$ が凸であるという仮定から，すべての $q \in Q$ に対して $A^q \geq 0$ である．

これらの $|Q|$ 個の (10) に示される単一目的問題を統合することで，次の**二乗距離凸多目的順序メディアン問題**を得る:

$$\min_{\mathbf{x}\in\Omega} \left\{ F^1(\mathbf{x}), F^2(\mathbf{x}), \cdots, F^{|Q|}(\mathbf{x}) \right\}. \tag{11}$$

これまでのように，式 (11) のパレート解 E^* を構成したいのだが，通常これを直接求めることは簡単ではない．そこで，弱パレート解の集合，すなわち，どんな点集合 $\mathbf{y} \in \Omega$ に対してもいくつかの $q \in Q$ において $F^q(\mathbf{y}) \geq F^q(\mathbf{x})$ である点集合 $\mathbf{x} \in \Omega$ を示そう．等価な解が存在しない（すなわちすべての $q \in Q$ に対して $F^q(\mathbf{y}) = F^q(\mathbf{x})$ のとき $\mathbf{x} = \mathbf{y}$）と言う緩い条件のもとでは，パレート解と弱パレート解は一致する．以下ではこれが成り立つことを仮定する．特にすべての目的関数 $F^q(\mathbf{x})$ が狭義に凸（すなわち $A_q > 0$），あるいは点 $\mathbf{p}_i$ が一般の位置にあるときには（前節での仮定を拡張している），これが当てはまることは容易に分かる:

(b-1) どの 2 つの目的関数の等高線も 1 点で交わる;
(b-2) すべての F^q は Ω に一意な最小解 $\mathbf{f}_q^*$ をもつ.

以上から，問題 (11) の（弱）パレート集合をやはり E^* と表すこととする．$F^q(\mathbf{x})$ と $F^r(\mathbf{x})$ からなる 2 目的問題パレート集合を E^*_{qr}，$F^q(\mathbf{x})$, $F^r(\mathbf{x})$ および $F^s(\mathbf{x})$ からなる 3 目的問題のパレート集合を E^*_{qrs} と表す.

4.2 特性

次の制約なし凸ベクトル最小化問題を考える:

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2} \left\{F^1(\mathbf{x}), F^2(\mathbf{x}), \cdots, F^{|Q|}(\mathbf{x})\right\}.$$

空間 $\mathbb{R}^2$ 上に定義されるコンパクトな目的関数をもつこの制約なし問題の弱パレート解 $WE(F^1, F^2, \cdots, F^{|Q|})$ に関する以下の事実が知られている.

(r-1) 二目的の場合: $WE(F^q, F^r)$ はそれぞれの単一目的問題の極小解 $\mathbf{f}_q^*$ と $\mathbf{f}_r^*$ を結ぶ連結集合となる（Hansen et al.[2] を参照）．上で述べた仮定のもとでは，より正確には 2 つの点を結ぶ連続曲線となる.
(r-2) 3 目的の場合: $WE(F^q, F^r, F^s)$ は部分問題 $WE(F^q, F^r)$, $WE(F^r, F^s)$ および $WE(F^s, F^q)$ の弱パレート集合によって囲まれた領域となる（Rodríguez-Chía and Puerto[13] を参照）
(r-3) 4 目的以上の場合:

$$WE(F^1, F^2, \cdots, F^{|Q|}) = \bigcup_{Q'\subset Q, |Q'|=3} WE(F^q, q \in Q').$$

となる（Plastria and Carrizosa[12]，Rodríguez-Chía and Puerto[13] を参照).

しかしながら，同じ結果が凸コンパクト部分集合 $S \subset \mathbb{R}^2$ に制約された多目的問題に対しても成り立つことが，以下の補助定理（証明は省略）から容易に導かれる.

補助定理 4.1 S を $\mathbb{R}^d$ のコンパクトな凸部分集合としよう．次の制約多目的問題 (P) を考える:

$$\min\{F^1, F^2, \cdots, F^{|Q|} | \mathbf{x} \in S\},$$

ここですべての $F^q(\mathbf{x})$ は $\mathbb{R}^d$ 上で定義される凸コンパクト関数である．すると，制約なし多目的問題 (P')

$$\min\{G^1, G^2, \cdots, G^{|Q|} | \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d\}$$

の（弱）パレート集合が (P) の（弱）パレート集合と等しくなるような $\mathbb{R}^d$ 上の凸コンパクト関数 $G^q(\mathbf{x})$ を見つけることができる.

$q, r \in Q$ によって定義される凸二目的問題に対して，3 節の結果から，（弱）パレート集合 E^*_{qr} はグラフ $\partial V \cup L^{qr} \cup \partial\Omega$ の辺から構成される. (r-1) より，凸の目的関数に対して E^*_{qr} は $\mathbf{f}^*_q$ と $\mathbf{f}^*_r$ をつなぐ連続曲線になるので，Ohsawa et al.[9] で示された考えである「最急降下パス」の一般化によってこの曲線を構成する線分を以下のように直接決定することができる.

$\mathbf{f}^*_q$ から（後で述べるように，より一般にはグラフ $\partial V \cup L^{qr} \cup \partial\Omega$ の頂点 $\mathbf{a}$ から）始め，最終的に $\mathbf{f}^*_r$ に到達する辺を選ばなければならないが，この過程で $F^r(\mathbf{x})$ の値は常に減少し，$F^q(\mathbf{x})$ の値は増加する．頂点 $\mathbf{a}$ から先の辺は，$(F^q(\mathbf{a}), F^r(\mathbf{a}))$ から先の $(F^q(\mathbf{x}), F^r(\mathbf{x}))$-図上の曲線に対応し，それらの中から支配されていいないものを選ばなければならない．頂点 $\mathbf{a}$ の先のすべての辺は何らかの方向 $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$ を持つ線分であり，(F^q, F^r)-図での $(F^q(\mathbf{a}), F^r(\mathbf{a}))$ における傾きは，$\mathbf{a}$ から方向 $\mathbf{e}$ へ動くときの $F^r(\mathbf{x})$ の $F^q(\mathbf{x})$ に対する相対的な変化量

$$\frac{DF^r(\mathbf{a})(\mathbf{e})}{DF^q(\mathbf{a})(\mathbf{e})}, \tag{12}$$

である．ここで $DF^q(\mathbf{a})(\mathbf{e})$ は $\mathbf{a}$ における方向 $\mathbf{e}$ の $F^q(\mathbf{x})$ に関する方向微分係数を表す．したがって頂点 $\mathbf{a}$ において，$DF^r(\mathbf{a})(\mathbf{e}) < 0$ かつ $DF^q(\mathbf{a})(\mathbf{e}) > 0$ を満たす方向 $\mathbf{e}$ の中から，(12) を最小化する $\mathbf{e}$ を選ばなければならない．頂点 $\mathbf{a}$ において複数の辺が最小の値をとるという例外的な場合においては，$F^q(\mathbf{x})$ が二次なので $F^q(\mathbf{x})$ の二次方向微分を用いることで最急降下パスを見つけることができる．以下では，そのように構成されたパスを **$\mathbf{f}^*_q$ から $\mathbf{f}^*_r$ への最急降下パス**と呼ぼう.

方向微分係数の計算は簡単である．地点 $\mathbf{a}$ と方向 $\mathbf{e}$ が与えられたとき，領域 $V_{i_1,i_2,\cdots,i_{|I|}}$ においては $A^q = 0$ のときには (4) 式の，$A^q > 0$ のときには (6) 式の表現が有効である．よって

$$DF^q(\mathbf{a})(\mathbf{e}) = \begin{cases} \langle\ \mathbf{e}\ ;\ \hat{\mathbf{p}}^q_{i_1,i_2,\cdots,i_{|I|}}\ \rangle, & \text{if } A^q = 0, \\ 2A^q\langle\ \mathbf{e}\ ;\ \overline{\mathbf{p}}^q_{i_1,i_2,\cdots,i_{|I|}} - \mathbf{a}\ \rangle, & \text{if } A^q > 0, \end{cases}$$

となる．ここで定義 (5) and (7) が α^q_k を使って $F^q(\mathbf{x})$ に適用されている.

命題 5　パレート集合 E^* は平面グラフ $\partial V \cup \left(\bigcup_{q\in Q}\bigcup_{r\in Q, q>r} L^{qr}\right) \cup \partial\Omega$ の連結面から構成される.

証明 (r-2) および (r-3) から，パレート集合 E^* は E^*_{qr} のようなタイプのパレート集合によって閉じられる．このことおよび命題 3 は，E^* は平面グラフ $\partial V \cup \left(\bigcup_{q\in Q}\bigcup_{r\in Q, q>r} L^{qr}\right) \cup \partial\Omega$ の連結面から構成されることを意味する. ■

4.3 解法

命題 3 および命題 5 から，凸多目的順序メディアン問題 (11) に対するパレート集合 E^* を構築する以下のアルゴリズムが得られる.

■アルゴリズム 3

ステップ 1. 平面グラフ $\partial V \cup \partial\Omega$ を構築し，すべての $q \in Q$ について最適解 $\mathbf{f}^*_q$ を求める.

ステップ 2. すべての q と $r(\neq q)$ に対して平面グラフ $\partial V \cup L^{qr} \cup \partial\Omega$ を定義し，E^*_{qr} すなわち $\partial V \cup L^{qr} \cup \partial\Omega$. 上の $\mathbf{f}^*_q$ から $\mathbf{f}^*_r$ へ至る最急降下パスを見つける．

ステップ 3. すべての q，r および s に対して，E^*_{qrs} すなわち E^*_{qr}，E^*_{rs} および E^*_{sq} によって閉じられた領域を見つける．

ステップ 4. E^* はすべての E^*_{qrs} の和集合である．

命題 6 狭義凸性もしくは一般の位置の仮定の下で，かつ $|Q|$ が与えられたとき，パレート集合 E^* は $O(|I|^5 + |I||\partial\Omega|)$ の計算量で検出できる．

5 結論

これまで順序メディアン立地問題に関して多くの研究が行われてきたが，多目的問題，特に非凸な目的関数を扱うものは比較的少ない．本稿では，ボロノイ図や包絡線といった計算幾何学の手法を援用して多くの順序メディアン問題からなるパレート最適解を，多項式時間で導出するアルゴリズムを示した．本稿では二乗距離を用いた分析のみを行ったが，ここでの結果は比較的容易にレクティリニア距離など他の距離に拡張できる．ただしその際にはパレート解と弱パレート解の差に注意を払わなければならない．

謝辞

本研究は，科学研究費（平成 18 − 20 年度，基盤研究（B)，18330057）による研究成果の一部である．貴重なコメントを頂戴した腰塚武志先生，八森正泰先生，小林隆史先生，宮川雅至先生に感謝いたします．

参考文献

[1] R.K. Francis and J.A. White: *Facility Layout and Location: An Analytical Approach* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1974).

[2] P. Hansen, D. Peeters and J.-F. Thisse: Constrained location and the Weber-Rawls problem. *Annals of Operations Research*, **11**(1981), 147–166.

[3] J. Muñoz-Pérez and J.J. Saameño-Rodríguez: Location of an undesirable facility in a polygonal region with forbidden zones. *European Journal of Operational Research*, **114**(1999), 372–379.

[4] S. Nickel and J. Puerto: A unified approach to network location problems. *Networks*, **34**(1999), 283–290.

[5] S. Nickel and J. Puerto: *Location Theory –A Unified Approach–* (Springer, Berlin, 2005).

[6] S. Nickel, J. Puerto and A.M. Rodríguez-Chía: MCDM location problems. In J. Figueira, S. Greco and M. Ehrgott (eds.) *Multiple Criteria Decision Analysis* (Springer, New York, 2005), 761–795.

[7] Y. Ohsawa: A geometrical solutions for quadratic bicriteria location models. *European*

Journal of Operational Research, **114**(1999), 380–388.

[8] Y. Ohsawa: Bicriteria Euclidean location associated with maximin and minimax criteria. *Naval Research Logistics*, **47**(2000), 581–592.

[9] Y. Ohsawa, N. Ozaki and F. Plastria: Equity-efficiency bicriteria location with squared Euclidean distances. *Operations Research*, to appear.

[10] Y. Ohsawa, F. Plastria and K. Tamura: Euclidean push-pull partial covering problems. *Computers and Operations Research*, **33**(2006), 3566–3582.

[11] A. Okabe, B. Boots, K. Sugihara and S.N. Chiu: *Spatial Tessellations* (Wiley, New York, 1999).

[12] F. Plastria and E. Carrizosa: Geometrical characterization of weakly efficient points. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **90**(1996), 217–223.

[13] A.M. Rodríguez-Chía and J. Puerto: Geometrical description of the weakly efficient solution set for multicriteria location problems. *Annals of Operations Research*, **111**(2002), 181–196.